A Matemática e as Órbitas dos Satélites

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos

Instituto Superior Técnico

Julho, 2009

- Equações Diferenciais

- Equações Diferenciais

Em matemática, uma *equação diferencial* é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas.

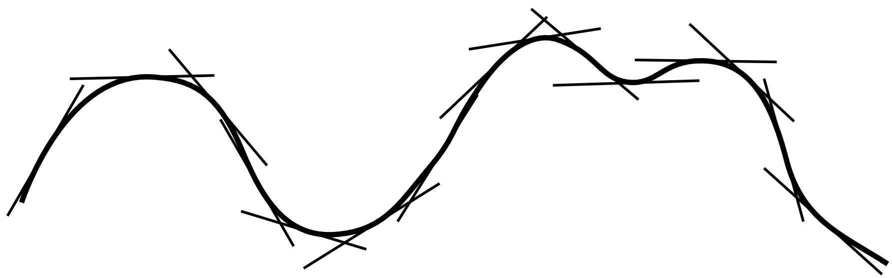
$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots) = 0$$

• Equações Diferenciais

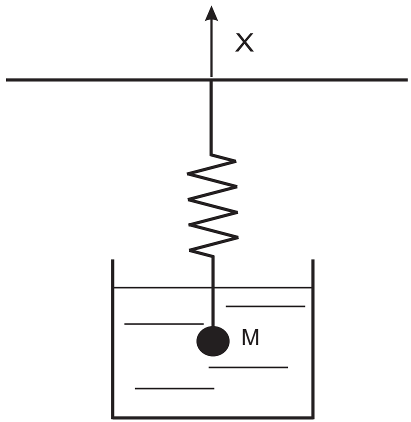
Em matemática, uma *equação diferencial* é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas.

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots) = 0$$

As equações diferencias são usadas para construir modelos matemáticos de fenómenos físicos nos quais se relacionam os valores de certas grandezas com as suas taxas de variação.



Movimento de corpo suspenso por mola



Corpo de massa M suspenso por uma mola e sujeito à gravidade e ao atrito de um líquido.

Forças aplicadas à massa M

Forças aplicadas à massa M

Força da mola: considera-se proporcional ao elongamento da mola em relação à posição de equilíbrio

$$F_m = -k_m X$$

Forças aplicadas à massa M

Força da mola: considera-se proporcional ao elongamento da mola em relação à posição de equilíbrio

$$F_m = -k_m X$$

Força da gravidade: supondo que a aceleração da gravidade no local é g

$$F_g = -Mg$$

Forças aplicadas à massa M

Força da mola: considera-se proporcional ao elongamento da mola em relação à posição de equilíbrio

$$F_m = -k_m X$$

Força da gravidade: supondo que a aceleração da gravidade no local é g

$$F_g = -Mg$$

Força de impulsão: supondo que a massa de líquido deslocada pelo corpo é M_l

$$F_i = M_l g$$

Forças aplicadas à massa M

Força da mola: considera-se proporcional ao elongamento da mola em relação à posição de equilíbrio

$$F_m = -k_m X$$

Força da gravidade: supondo que a aceleração da gravidade no local é g

$$F_g = -Mg$$

Força de impulsão: supondo que a massa de líquido deslocada pelo corpo é M_l

$$F_i = M_l g$$

Força de atrito: considera-se proporcional à velocidade do corpo, retardando o movimento

$$F_a = -k_a V$$

Forças aplicadas à massa M

Força da mola: considera-se proporcional ao elongamento da mola em relação à posição de equilíbrio

$$F_m = -k_m X$$

Força da gravidade: supondo que a aceleração da gravidade no local é g

$$F_g = -Mg$$

Força de impulsão: supondo que a massa de líquido deslocada pelo corpo é M_l

$$F_i = M_l g$$

Força de atrito: considera-se proporcional à velocidade do corpo, retardando o movimento

$$F_a = -k_a V$$

Força Total: $$F = F_m + F_g + F_i + F_a$$

$$X = X(t) = \text{ posição } , V = dX/dt = \text{ velocidade } , A = dV/dt = \text{ aceleração}$$

$X = X(t) =$ posição , $V = dX/dt =$ velocidade , $A = dV/dt =$ aceleração

Lei de Newton: $$F = MA$$

$X = X(t) =$ posição , $V = dX/dt =$ velocidade , $A = dV/dt =$ aceleração

Lei de Newton: $F = MA$

$$-k_m X - Mg + M_l g - k_a V = M\frac{dV}{dt}$$

$X = X(t) =$ posição , $V = dX/dt =$ velocidade , $A = dV/dt =$ aceleração

Lei de Newton: $F = MA$

$$-k_m X - Mg + M_l g - k_a V = M\frac{dV}{dt}$$

Equações Diferenciais do Movimento:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{k_m}{M}X - \frac{k_a}{M}V - \frac{(M-M_l)}{M}g \end{aligned}$$

$X = X(t) =$ posição , $V = dX/dt =$ velocidade , $A = dV/dt =$ aceleração

Lei de Newton: $F = MA$

$$-k_m X - Mg + M_l g - k_a V = M\frac{dV}{dt}$$

Equações Diferenciais do Movimento:

$$\begin{aligned} \tfrac{dX}{dt} &= V \\ \tfrac{dV}{dt} &= -\tfrac{k_m}{M}X - \tfrac{k_a}{M}V - \tfrac{(M-M_l)}{M}g \end{aligned}$$

ou, numa só equação:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k_a}{M}\frac{dX}{dt} + \frac{k_m}{M}X = -\frac{(M-M_l)}{M}g$$

Análise das Equações

Análise das Equações

Posição de equilíbrio: posição e velocidade constantes $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$

$$V = 0 \qquad \text{e} \qquad X = -\frac{(M - M_l)}{M} g$$

Análise das Equações

Posição de equilíbrio: posição e velocidade constantes $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$

$$V = 0 \qquad \text{e} \qquad X = -\frac{(M - M_l)}{M} g$$

A energia:

$$E = K + P = \frac{1}{2} M V^2 + (M - M_l) g X + \frac{1}{2} k_m X^2$$

satisfaz

$$\frac{dE}{dt} = M V \frac{dV}{dt} + (M - M_l) g V + k_m X V = -k_a V^2$$

Análise das Equações

Posição de equilíbrio: posição e velocidade constantes $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$

$$V = 0 \qquad \text{e} \qquad X = -\frac{(M - M_l)}{M} g$$

A energia:

$$E = K + P = \frac{1}{2} M V^2 + (M - M_l) g X + \frac{1}{2} k_m X^2$$

satisfaz

$$\frac{dE}{dt} = M V \frac{dV}{dt} + (M - M_l) g V + k_m X V = -k_a V^2$$

logo, como $k_a > 0$, a energia decresce com o tempo (dissipação devida ao atrito)

Análise das Equações

Posição de equilíbrio: posição e velocidade constantes $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$

$$V = 0 \qquad \text{e} \qquad X = -\frac{(M - M_l)}{M} g$$

A energia:

$$E = K + P = \frac{1}{2} M V^2 + (M - M_l) g X + \frac{1}{2} k_m X^2$$

satisfaz

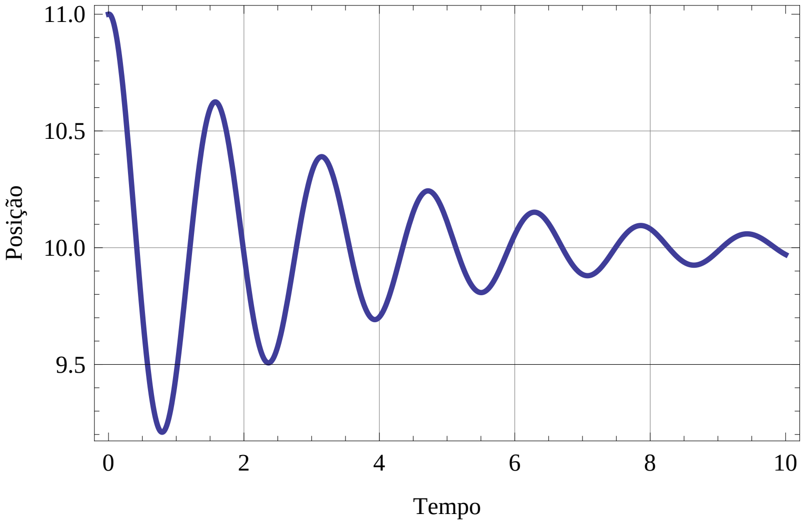
$$\frac{dE}{dt} = M V \frac{dV}{dt} + (M - M_l) g V + k_m X V = -k_a V^2$$

logo, como $k_a > 0$, a energia decresce com o tempo (dissipação devida ao atrito)

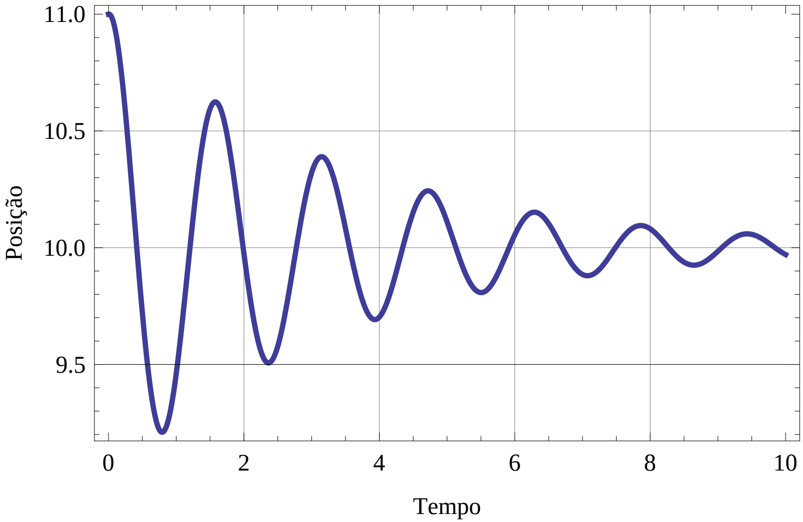
ou, se $k_a = 0$, a energia é conservada (conservação de energia sem atrito)

$$X(t) = -\frac{M - M_l}{M} g + e^{-\frac{k_a}{2M} t} (A \cos \mu t + B \mathrm{sen} \mu t) \quad , \quad \mu = \frac{\sqrt{4 k_m M - k_a^2}}{2M}$$

$$X(t) = -\frac{M - M_l}{M} g + e^{-\frac{k_a}{2M} t} (A \cos \mu t + B \mathrm{sen} \mu t) \quad , \quad \mu = \frac{\sqrt{4 k_m M - k_a^2}}{2M}$$

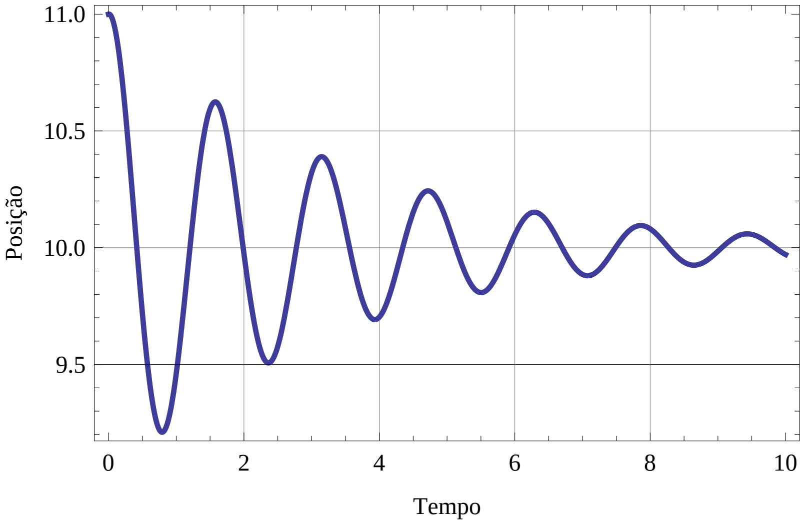


$$X(t) = -\frac{M - M_l}{M} g + e^{-\frac{k_a}{2M} t} (A \cos \mu t + B \mathrm{sen} \mu t) \quad , \quad \mu = \frac{\sqrt{4 k_m M - k_a^2}}{2M}$$



Em geral: Como calcular a posição do corpo ao longo do tempo resolvendo numericamente as equações diferenciais do movimento?

$$X(t) = -\frac{M - M_l}{M} g + e^{-\frac{k_a}{2M} t} (A \cos \mu t + B \mathrm{sen} \mu t) \quad , \quad \mu = \frac{\sqrt{4 k_m M - k_a^2}}{2M}$$



Em geral: Como calcular a posição do corpo ao longo do tempo resolvendo numericamente as equações diferenciais do movimento?

Interessa saber calcular valores de uma variável a partir da sua taxa de variação.

Exemplo: Desintegração radioactiva

Sabe-se que um isótopo radioactivo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de isótopo existente em cada instante de tempo.

Exemplo: Desintegração radioactiva

Sabe-se que um isótopo radioactivo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de isótopo existente em cada instante de tempo.

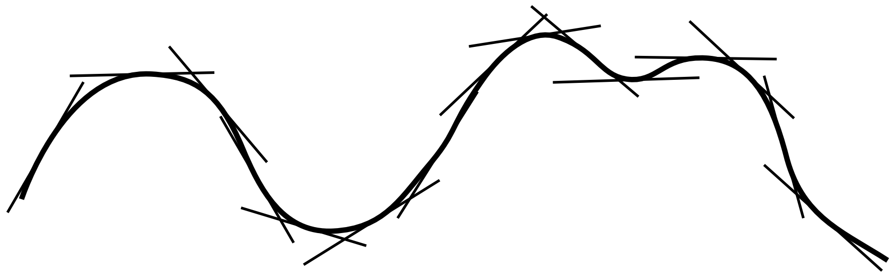
$$\frac{dQ}{dt} = -KQ \quad , \quad K > 0$$

Exemplo: Desintegração radioactiva

Sabe-se que um isótopo radioactivo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de isótopo existente em cada instante de tempo.

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ \quad , \quad K > 0$$

Conhecido o gráfico de uma função dependente do tempo, a sua taxa de variação em cada instante é igual ao declive da recta tangente ao gráfico no ponto correspondente

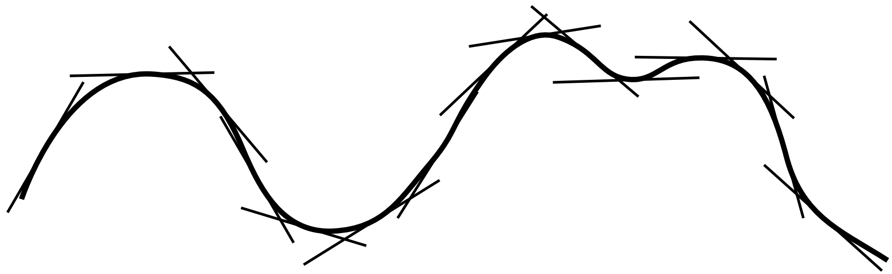


Exemplo: Desintegração radioactiva

Sabe-se que um isótopo radioactivo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de isótopo existente em cada instante de tempo.

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ \quad , \quad K > 0$$

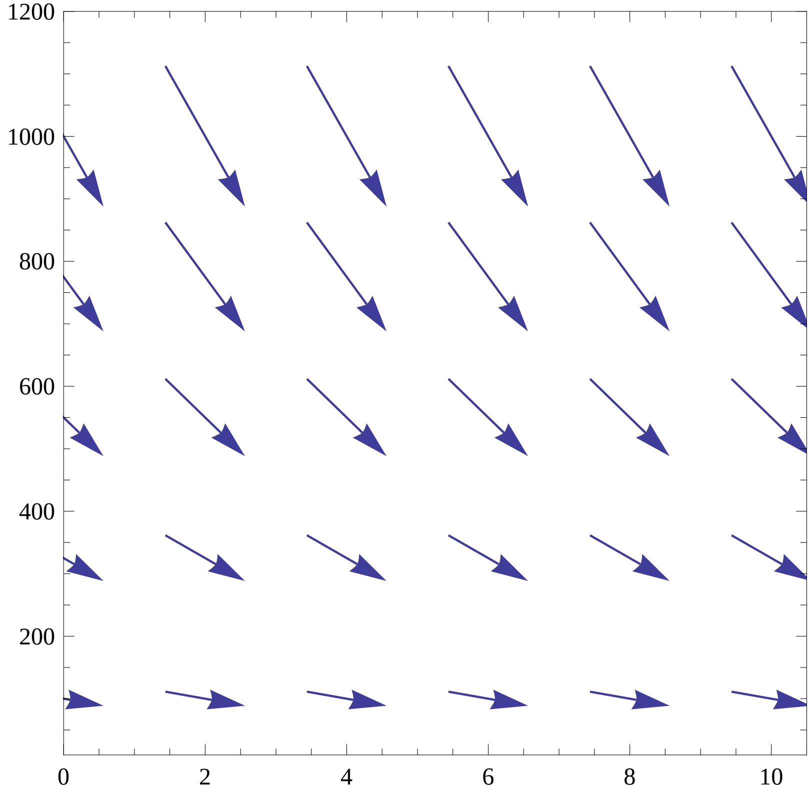
Conhecido o gráfico de uma função dependente do tempo, a sua taxa de variação em cada instante é igual ao declive da recta tangente ao gráfico no ponto correspondente

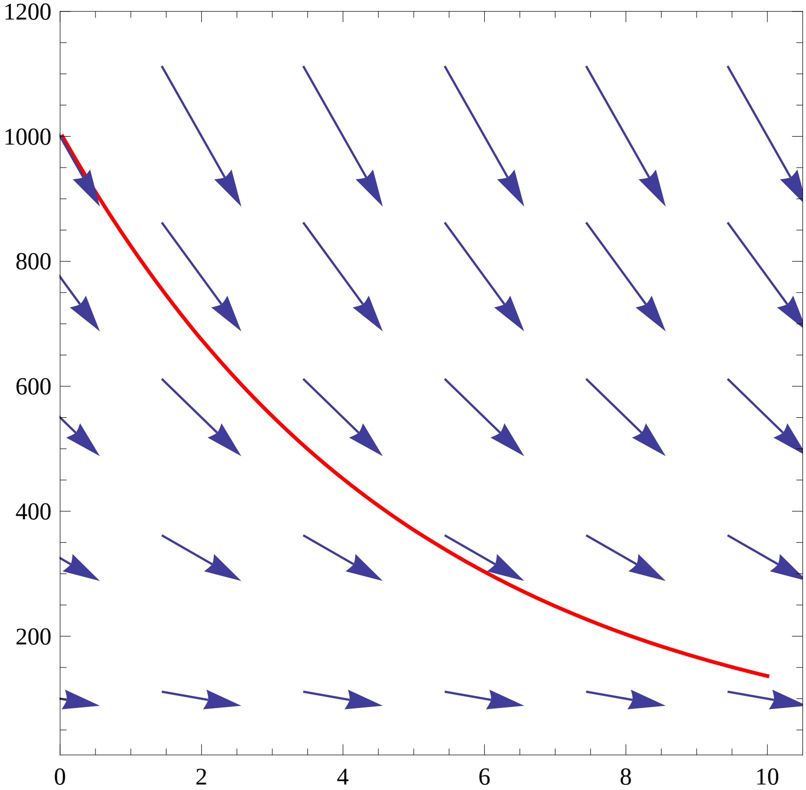


Logo, pretende-se determinar uma curva conhecendo as rectas tangentes em todos os pontos.

Apresentam-se gráficamente as tangentes de possíveis curvas para soluções da equação diferencial da desintegração radioactiva e a solução para $Q = 1000$ no instante inicial $t = 0$, com constante de desintegração $K = 0,2$.

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ \quad , \quad Q(0) = 1000$$


1200
1000
800
600
400
200
0
2
4
6
8
10


1200
1000
800
600
400
200
0
2
4
6
8
10

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ$$

$$Q(0) = 1000 \quad , \quad K = 0.2$$

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ$$

$$Q(0) = 1000 \quad , \quad K = 0.2$$

$$Q(t) = Q(0)e^{-Kt}$$


MCDONNELL
DOUGLAS